C 1
Concours MP

LCC 550

J. 6285

1999

SESSION DE 1999

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Lyon et Cachan - Groupes M, I et MP)

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

Tournez la page S.V.P.

Notations : Dans tout le problème, on appelle polynôme homogène en les variables $x_1, \ldots, x_n$ de degré d à coefficients entiers une expression Q de la forme

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in \Lambda_{n,d}} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

où

$$\Lambda_{n,d} = \{ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = d \}$$

et pour tout $\alpha \in \Lambda_{n,d}$, le coefficient a_α appartient à $\mathbb{Z}$.

On notera $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ l'ensemble des polynômes homogènes en les variables $x_1, \ldots, x_n$ de degré d à coefficients entiers.

I. Préliminaires, premiers exemples

Soient Q et R dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$. **Dans tout le problème**, on dira que Q est équivalent à R s'il existe une matrice $M \in \mathrm{GL(n, \mathbb{Q})}$ (groupe des matrices carrées $n \times n$ inversibles et à coefficients rationnels) et un rationnel non nul c tels que

$$Q(\bar{x}) = c \, R(\bar{x} \cdot {}^tM)$$

où $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, ${}^tM$ est la transposée de la matrice $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et

$$\bar{x} \cdot {}^tM = (\sum_{i=1}^{n} m_{1i} \, x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} m_{ni} \, x_i).$$

I.1 a) Montrer que "être équivalent à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$.

b) Soit μ un entier non nul. Montrer que $\mu^{10} x_1^2 + \mu^4 x_1 x_2 + x_2^2$ est équivalent à $x_1^2 + x_1 x_2 + \mu^2 x_2^2$ dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$. (Indication : on prendra M diagonale).

I.2 a) Soit $Q(x_1, \ldots, x_n) = a \, x_i^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ où i est fixé entre 1 et n et a dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que Q est équivalent à x_1^2.

b) Soit $Q(x_1, x_2) = a \, x_1^2 + b \, x_1 \, x_2 + c \, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer que si $b^2 - 4 \, a \, c = 0$, alors Q est équivalent à x_1^2.

c) Soit $Q(x_1, x_2) = a \, x_1^2 + b \, x_1 \, x_2 + c \, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer plus généralement qu'il existe un entier α tel que Q est équivalent à $x_1^2 + \alpha \, x_2^2$.

d) Soit $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + \alpha \, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que Q soit équivalent à x_1^2.

e) Déterminer l'ensemble des classes d'équivalence de la relation "être équivalent à" sur $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$.

Soient Q dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ et p un nombre premier. **Dans tout le problème**, on dira que Q est simplifiable en p s'il existe $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $s \in \mathbb{Z}$ tels que

(i) $s > \dfrac{d}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i$,

(ii) le polynôme $p^{-s} Q(p^{\omega_1} x_1, \ldots, p^{\omega_n} x_n)$ est encore à coefficients entiers (i.e appartient à $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$).

Le $(n+1)$-uplet $(s, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ sera appelé poids de simplification en p pour le polynôme Q.

I.3 Soit Q dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ et p un nombre premier.

a) Montrer que si $(s, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ est un poids de simplification en p pour Q, alors pour tout $\omega \in \mathbb{Z}$, $(s + d\omega, \omega_1 + \omega, \ldots, \omega_n + \omega)$ est aussi un poids de simplification en p pour Q.

b) Montrer qu'il existe un poids de simplification en p pour Q de la forme $(s, \omega, \ldots, \omega)$ avec s et ω dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si tous les coefficients de Q sont divisibles par p.

I.4 a) Soient k un entier entre 1 et n, et $l_1, \ldots, l_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose indépendantes. Montrer qu'il existe x dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout j entre 1 et k, on a $l_j(x) > 0$.
En déduire qu'il existe $\tilde{x}$ dans $\mathbb{Z}^n$ tel que pour tout j entre 1 et k, on a $l_j(\tilde{x}) > 0$.

b) Pour a réel, on note M_a la matrice carrée de taille $n-1$ dont le terme général $m_{i,j}$ vaut a si $i = j = 1$ et -1 sinon. Montrer que $-n$ est valeur propre de M_a si et seulement si $a = -\dfrac{n}{2} - 1$.

c) En déduire que pour tout nombre premier p et pour tout couple (d_1, d_n) d'entiers positifs vérifiant $(d_1, d_n) \neq (\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ et $d_1 + d_n = d$, le polynôme $x_1^{d_1} x_n^{d_n} + x_2^d + \cdots + x_{n-1}^d$ est simplifiable en p dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$.

d) Montrer que pour tout nombre premier p, le polynôme $x_1^d + \cdots + x_n^d$ n'est pas simplifiable en p dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ et le polynôme $x_1 x_3 + x_2^2$ n'est pas simplifiable en p dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2, x_3]$.

II. Simplification de formes quadratiques

Dans toute cette partie, on ne s'intéresse qu'à des polynômes de degré $d = 2$. Pour un élément Q de $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ écrit sous la forme

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j\,,$$

on note $S(Q)$ la matrice symétrique réelle de taille n dont le terme général s_{ij} est défini par $s_{ij} = a_{ij}$ si $i < j$ et $s_{ii} = 2\, a_{ii}$. On note enfin $D(Q)$ le déterminant de la matrice $S(Q)$.

II.1 Exprimer $Q(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction de $\bar{x}$, ${}^t\bar{x}$ et $S(Q)$.

II.2 a) Soit $R(\bar{x}) = c\, Q(\bar{x} \cdot {}^tM)$ un polynôme de $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ équivalent à Q, où $M \in \mathrm{GL(n, \mathbb{Q})}$ et $c \in \mathbb{Q}^*$. Exprimer $S(R)$ en fonction de c, M et $S(Q)$. En déduire $D(R)$ en fonction de c, n, $\det M$ et $D(Q)$.

b) Soit Q dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ tel que $D(Q) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\tilde{Q}$ équivalent à Q dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ tel que pour toute matrice $M \in \mathrm{SL(n, \mathbb{Z})}$ (groupe des matrices $n \times n$ à coefficients entiers dont le déterminant vaut 1) et pour tout p premier, le polynôme $\tilde{Q}(\bar{x} \cdot {}^tM)$ n'est pas simplifiable en p. (Indication : si Q est dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$, alors $D(Q) \in \mathbb{Z}$).

Tournez la page S.V.P.

Notations : Dans tout le problème, on appelle polynôme homogène en les variables $x_1, \ldots, x_n$ de degré d à coefficients entiers une expression Q de la forme

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in \Lambda_{n,d}} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

où

$$\Lambda_{n,d} = \{ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = d \}$$

et pour tout $\alpha \in \Lambda_{n,d}$, le coefficient a_α appartient à $\mathbb{Z}$.

On notera $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ l'ensemble des polynômes homogènes en les variables $x_1, \ldots, x_n$ de degré d à coefficients entiers.

I. Préliminaires, premiers exemples

Soient Q et R dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$. **Dans tout le problème**, on dira que Q est équivalent à R s'il existe une matrice $M \in \mathrm{GL(n, \mathbb{Q})}$ (groupe des matrices carrées $n \times n$ inversibles et à coefficients rationnels) et un rationnel non nul c tels que

$$Q(\bar{x}) = c \, R(\bar{x} \cdot {}^tM)$$

où $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, ${}^tM$ est la transposée de la matrice $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et

$$\bar{x} \cdot {}^tM = \Big(\sum_{i=1}^{n} m_{1i} \, x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} m_{ni} \, x_i \Big).$$

I.1 a) Montrer que "être équivalent à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$.

b) Soit μ un entier non nul. Montrer que $\mu^{10} x_1^2 + \mu^4 x_1 x_2 + x_2^2$ est équivalent à $x_1^2 + x_1 x_2 + \mu^2 x_2^2$ dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$. (Indication : on prendra M diagonale).

I.2 a) Soit $Q(x_1, \ldots, x_n) = a \, x_i^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ où i est fixé entre 1 et n et a dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que Q est équivalent à x_1^2.

b) Soit $Q(x_1, x_2) = a \, x_1^2 + b \, x_1 x_2 + c \, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer que si $b^2 - 4ac = 0$, alors Q est équivalent à x_1^2.

c) Soit $Q(x_1, x_2) = a \, x_1^2 + b \, x_1 x_2 + c \, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer plus généralement qu'il existe un entier α tel que Q est équivalent à $x_1^2 + \alpha \, x_2^2$.

d) Soit $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + \alpha \, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que Q soit équivalent à x_1^2.

e) Déterminer l'ensemble des classes d'équivalence de la relation "être équivalent à" sur $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$.

Soient Q dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ et p un nombre premier. **Dans tout le problème**, on dira que Q est simplifiable en p s'il existe $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $s \in \mathbb{Z}$ tels que

(i) $s > \dfrac{d}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i$,

(ii) le polynôme $p^{-s} Q(p^{\omega_1} x_1, \ldots, p^{\omega_n} x_n)$ est encore à coefficients entiers (i.e appartient à $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$).

Le $(n+1)$-uplet $(s, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ sera appelé poids de simplification en p pour le polynôme Q.